



TITLE:

# Regular Coverings of Links (3 and 4-Dimensional Manifolds)

AUTHOR(S):

作間, 誠

---

CITATION:

作間, 誠. Regular Coverings of Links (3 and 4-Dimensional Manifolds). 数理解析研究所講究録 1982, 467: 4-13

ISSUE DATE:

1982-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103207>

RIGHT:

# Regular Coverings of Links

大阪市大 理 作間 誠

(Makoto Sakuma)

Kim-Tollefson [1] は、既約でない 3-mfd 上の involution は既約成分の involution に分解される事を示した。特に、系として、 $S^3$  の link  $L$  で分岐する 2-fold branched covering space が irreducible であるためには、 $L$  が non-splittable かつ prime であるのが必要十分である事が示された。

ここでは、Meeks-Yau [3] の equivariant sphere theorem を用いて上の結果を一般の regular cover の場合に拡張し、その二つの応用を述べる。一つは  $S^2 \times S^1$  を regular cover に持つ  $S^3$  内の link type の決定であり、もう一つは、composite link の period に関するものである。

以下、次の記号を用いる。

$S^3$  内の link  $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$  に對して、

$E(L) = S^3 - L$  :  $L$  の補空間,

$G(L) = \pi_1(E(L))$  :  $L$  の link group ,

$m(K_i) \in G(L)$  :  $K_i$  の meridian .

Link group  $G(L)$  から有限群  $G$  への epimorphism  $\varphi$  が与えられた時.

$E_\varphi(L)$  :  $\text{Ker } \varphi$  に対応する  $E(L)$  の covering space ,

$\Sigma_\varphi(L)$  :  $E_\varphi(L)$  の completion とし得られる  $S^3$  の branched cover .

この時、 $G$  は  $\Sigma_\varphi(L)$  に効果的に作用し、 $\Sigma_\varphi(L)/G \cong S^3$  となる。

$L$  の component  $K_i$  が branch set に属する (ie  $p^{-1}(K_i) \subset \text{Fix } G$ ,

但し  $p: \Sigma_\varphi(L) \rightarrow S^3$  は projection) 事と、 $\varphi(m(K_i)) \neq 1$  ( $\in G$ )

となる事は同値である。そこで、すべての  $i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) に

対して、 $\varphi(m(K_i)) \neq 1$  となる時、 $\Sigma_\varphi(L)$  を  $L$  の regular cover

と呼ぶ。又、特に、 $G$  が abel 群の時  $\Sigma_\varphi(L)$  を  $L$  の abelian

cover、 $G$  が cyclic group  $\mathbb{Z}_n$  の時  $\Sigma_\varphi(L)$  を  $\Sigma_n(L)$  で表わし、 $L$  の

$n$ -fold branched cyclic cover と呼ぶ。

## § 1. Regular cover の second homotopy group

Link  $L$  の regular cover  $\Sigma_\varphi(L)$  に関して次が成り立つ。

定理 1 (a)  $\pi_2(\Sigma_\varphi(L)) \neq 0$  となるためには、 $L$  が split link または composite link である事が必要十分である。

(b)  $\Sigma_\varphi(L)$  が non-separating 2-sphere を含むためには、次の (1) または (2) の いづれかが成り立つ事が必要十分である。

(1)  $L$  は split link  $L_1 \circ L_2$

(2)  $L$  は composite link  $L_1 \# L_2$  で  $G_i \cong \varphi(G(L_i)) \cong \langle \varphi(m) \rangle$

( $i=1,2$ ) となる。但し、ここで  $G(L) = G(L_1) *_{\langle m \rangle} G(L_2)$

と見なしている。

更に、この時  $\Sigma_g(L)$  は (少なくとも) 次の個数の "独立な" non-separating 2-sphere を含む。

(1) の場合:  $1 + |G| \{ 1 - 1/|G_1| - 1/|G_2| \}$

(2) の場合:  $1 + [G : \langle \varphi(m) \rangle] \{ 1 - 1/[G_1 : \langle \varphi(m) \rangle] - 1/[G_2 : \langle \varphi(m) \rangle] \}$

(証明) Equivariant sphere theorem と homotopy Smith conjecture を用いる。詳しくは [8] を見て下さい。

§ 2.  $S^2 \times S^1$  を regular cover に持つ link

2-fold branched covering に関しては、branch line の一意性の問題はいろいろ研究されているが、一般の regular cover については、まだあまり調べられていない。ここでは、定理 1 を用いて、 $S^2 \times S^1$  を regular cover に持つ  $S^3$  内の link type を決定する。

定理 2  $\Sigma_g(L)$  が homotopy  $S^2 \times S^1$  であるためには、次の (1), (2) のいずれかが成立する事が必要十分である。

$$(1) \quad L \cong \bigcirc_{K_1} \bigcirc_{K_2}$$

$$G \cong D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$$

$$\varphi(m(K_1)) = x, \quad \varphi(m(K_2)) = y.$$

$$(2) \quad L \cong \bigcirc_{K_1} \bigcirc_{K_3} \bigcirc_{K_2}$$

$G$  は 2つの  $G^I(n, k)$ ,  $G^{II}(n, k)$  のいずれかに同型。

$$\begin{cases} G^I(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n = 1 \rangle \\ \quad (n, k : \text{positive integers}) \\ G^{II}(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n z^{k'} = 1 \rangle \\ \quad (n, k = 2k' : \text{positive integers}) \end{cases}$$

$$\varphi(m(K_1)) = x, \quad \varphi(m(K_2)) = y, \quad \varphi(m(K_3)) = z.$$

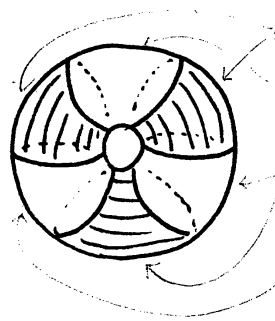
更に、上が成立する時、 $\Sigma_g(L)$  は  $S^2 \times S^1$  に同相である。

(証明) 十分性を示す。

(1) の場合。 Link を split する 2-sphere を  $S$ ,  $K_i$  を含む  $S^3 - S$  の component の closure を  $B_i$  とする。  $S^3 = B_1 \cup_S B_2$ ,  
よって  $\Sigma_g(L) = p^{-1}(B_1) \cup_{p^{-1}(S)} p^{-1}(B_2)$  とある。 とは 3 が、  
 $p^{-1}(B_i)$  は  $n$  本の  $\Sigma_2(K_i) - \{\text{two 3-balls}\} \cong S^2 \times I$  の disjoint  
union である。 これより  $\Sigma_g(L) \cong S^2 \times S^1$  を得る。

(次図参照)

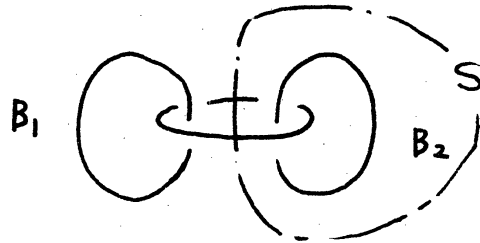
( $n=3$  の場合)



$$p^{-1}(B_1) = n(S^2 \times I)$$

$$p^{-1}(B_2) = n(S^2 \times S')$$

(2) の場合. Link を decompose する 2-sphere を  $S$ ,  $K_i$  を含む  $S^3 - S$  の component の closure を  $B_i$  ( $i=1,2$ ) とする。



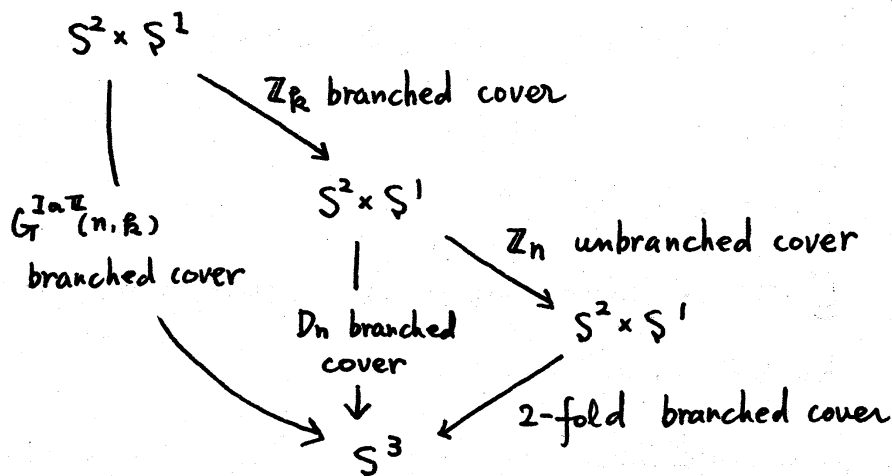
この時、 $\Sigma_\varphi(L) \cong p^{-1}(B_1) \cup_{p^{-1}(S)} p^{-1}(B_2)$ 。又、 $p^{-1}(B_i)$  は  $n$  個の  $S^3 - \{\text{two } 3\text{-balls}\} \cong S^2 \times I$  の disjoint union である事がわかる。これより  $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2 \times S'$  を得る。

次に必要性の証明の概略を述べる。 $\Sigma_\varphi(L)$  が homotopy  $S^2 \times S'$  であるとする。定理 1 により、 $L$  は split link  $L_1 \circ L_2$ , 又は composite link  $L_1 \# L_2$  である。 $\varphi_i = \varphi|_{G(L_i)}$  とすると、 $\Sigma_\varphi(L)$  は  $\Sigma_{\varphi_i}(L_i) - \{3\text{-balls}\}$  ( $i=1,2$ ) の copy を張り合わせて出来る。これより、 $\Sigma_{\varphi_i}(L_i)$  は homotopy 3-sphere で、しかも、 $\varphi_i$  は abelian representation である事がわかる。ところで、homotopy 3-sphere を abelian cover に持っ

link は trivial knot と Hopf link に限る ([4, 7, 8])

これより (1), (2) の いづれかが成立しなくてはならない事がわかる。

Remark 定理 2 で与えられた branched covering は、次の様に分解される。



### §3. Composite link の period

$S^3$  内の link  $L$  が period  $n (> 1)$  を持つとは、次の条件を満足する  $S^3$  上の homeomorphism  $T$  が存在する事を言う。

- (1)  $T(L) = L$ ,
- (2)  $\text{Fix}(T)$  は  $L$  と交わらない 1-sphere,
- (3)  $T$  は period  $n$  の periodic map。

この章では、定理 1 を用いて、composite link は "canonical" な period  $n$  を持つ事を示す。

今、 $L$  を period  $n$  の periodic link とし、 $T$  を それに付随  
 $L$  上の periodic map とする。この時 [10] により  $T$  は  
 standard rotation で  $S^3/T \cong S^3$  となる。  $p \in \text{projection}$   
 $S^3 \rightarrow S^3/T$  とし、  $K_0 = p(\text{Fix}(T))$ ,  $\underline{L} = p(L)$ ,  $\underline{L}' = K_0 \cup \underline{L}$   
 とおく。

定理 3 (a)  $L$  が split link であるためには、次の (1) または (2)  
 が成立する事が必要十分である。

(1)  $\underline{L}'$  : split link,

(2)  $\underline{L}'$  は composite link で、その decomposing 2-sphere は  
 $K_0$  と交わる。

(b)  $L$  は non-splittable とする。この時、 $L$  が composite  
 link であるためには、 $\underline{L}'$  が composite link で、その decomposing  
 2-sphere が  $K_0$  と交わる事が必要十分である。

(c)  $L$  が trivial knot であるためには、 $\underline{L}'$  が Hopf link  
 である事が必要十分である。

(証明) (a), (b).  $L$  及び  $\underline{L}'$  の適当な regular cover  
 に対して定理 1 を適用する ([9] 参照)。

(c) については [7, 8] 参照。



上の定理より、次を得る。

定理 4  $L$  を non-splittable link とし、 $\#\{n_i L_i \mid 1 \leq i \leq s\}$   
 $(s \geq 1, n_i \geq 1)$  を  $L$  の prime decomposition とする。この時、  
 もし  $L$  が period  $n (> 1)$  を持てば 次の (1) または (2) が成立する。

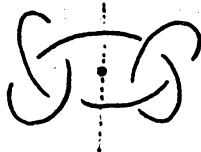
- (1)  $n$  はすべての  $n_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) を割り切る。
- (2) ある自然数  $j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) に対して次が成立する
  - (i)  $L_j$  は period  $n$  を持つ、
  - (ii)  $n \mid n_j - 1$ ,
  - (iii)  $n \mid n_i$  ( $i \neq j$ )。

更に、上の条件は knot に対しては十分条件でもある。

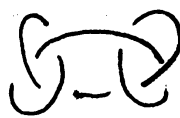
系 1 (1)  $K$  を nontrivial prime knot とすると、 $K \# K$  は  
 period 2 を持ち、しかもそれが唯一つの period である。

(2)  $K_1, K_2$  を相異なる nontrivial prime knot とすると、  
 $K_1 \# K_2$  は period を持つ ( $\neq 1$ )。

例 1 granny knot は唯一つ period 2 を持つ。一方、  
 square knot は period を持つ ( $\neq 1$ )。



granny



square

Remark 系 1 の (1) において、付随する involution も一意である事が証明からわかる。

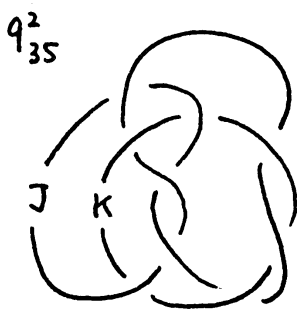
系 2 Non-splittable composite link は 高々 有限個の period しか持たない。

Remark Trotter [11], Murasugi [5] は、fibred knot は 高々 有限個の period しか持たない事を示した。

最後に、定理 3 の応用として、すべての自然数  $n (> 1)$  に対して、相異なる prime knots  $J_n, K_n$  で その  $n$ -fold branched cyclic cover が 同相となるものを構成する。

(二つの相異なる composite knots で すべての branched cyclic cover が 同相となる例は既に知られている。)

$L = J \cup K$  を  $9_{35}^2$ -link とする。この時、 $lk(J, K) = 1$ ,



$J, K$  は共に unknotted,  $J, K$  は

prime である。今、 $J_n [K_n]$  を

$\Sigma_n(K) \cong S^3$  ( $\Sigma_n(J)$ ) への  $J$  ( $K$ )

の lift とする。すると、定理 3 により

$J_n, K_n$  は共に non trivial prime knot

である。又、 $J_n, K_n$  の  $n$ -fold branched cyclic cover は

共に  $L$  の  $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$  branched cover であり、従って同相となる。  
 こゝで、Alexander 多項式を調べる事に依り、 $J_n$  と  $K_n$   
 は同相なる事がわかる。よゝ、これが求めていた knot である。  
 (この例は、筆者と中西氏が構成したものであるが、中西氏  
 は、tangle 論法の改良により、 $J_n, K_n$  の primeness の初等的  
 証明を与えた [6]。)

#### References

- [1] Kim, P.K., Tollefson, J.L.: Splitting involutions of nonprime 3-manifolds, Mich. Math. J. 27, 259-274
- [2] Kouno, M.: The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, 数理研講究録 417, pp.106-121 (1981)
- [3] Meeks, W.H.III, Yau, S.T.: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 112, 441-484 (1980)
- [4] Morgan, J.W.: Actions de groupes finis sur  $S^3$ , Lect. Notes in Math. 901 Springer Verlag, pp.277-289 (1981)
- [5] Murasugi K.: On periodic knots, Comment. Math. Helv. 46, 162-174 (1971)
- [6] Nakanishi Y.: Primeness of links, Math. Semi. Notes, Kobe Univ. 9, 415-440, (1981)
- [7] Sakuma M.: Abelian coverings of links, 数理研講究録 417, pp.62-70, (1981)
- [8] Sakuma M.: On regular coverings of links, to appear in Math. Ann.
- [9] Sakuma M.: Periods of composite links, Math. Semi notes, Kove Univ. 9, 445-452, (1981)
- [10] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia University, New York, 1979, in preparation
- [11] Trotter H.F.: Periodic automorphisms of groups and knots, Duke Math. J. 28 (1961), 553-558